Álgebra Linear: A Forma de Jordan

Quando a Diagonalização Falha

Material de Apoio

1 O Problema: A Matriz Defeituosa

Sabemos que o objetivo da diagonalização é escrever uma matriz M na forma $M = SDS^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal formada pelos autovalores e S é formada pelos autovetores. Mas o que acontece quando não temos autovetores suficientes?

Considere a seguinte matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Passo 1: Encontrando os Autovalores

Calculamos o polinômio característico $\det(M - \lambda I) = 0$:

$$(1-\lambda)(3-\lambda) - (-1 \cdot 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

Fatorando, obtemos $(\lambda - 2)^2 = 0$. Temos um autovalor repetido: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 2$.

Passo 2: Encontrando os Autovetores

Para $\lambda = 2$, resolvemos o sistema $(M - 2I)\vec{v} = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Isso nos dá a equação $-x + y = 0$, ou seja, $x = y$. O nosso autovetor é $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A Crise: Como o segundo autovalor também é 2, ele geraria exatamente o mesmo autovetor. Se montarmos a matriz S com duas colunas iguais, o seu determinante será zero. Uma matriz com determinante zero não possui inversa (S^{-1} não existe), logo, a fórmula $M = SDS^{-1}$ quebra!

2 A Ilusão da Matriz Identidade

Um aluno atento poderia perguntar: *"E se usarmos a matriz diagonal D com os autovalores repetidos, mesmo com autovetores iguais?"*

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que esta matriz D é exatamente $2 \cdot I$ (duas vezes a Matriz Identidade). Se tentássemos forçar a diagonalização com ela, teríamos:

$$M = S(2I)S^{-1}$$

Como matrizes escalares (múltiplas da identidade) comutam com qualquer matriz, podemos reorganizar a equação:

$$M = 2I(SS^{-1}) = 2I \cdot I = 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Chegamos a um absurdo! A matemática diz-nos que, se a matriz D fosse apenas os autovalores na diagonal, a nossa matriz original M **teria de ser** a própria matriz diagonal desde o início. Como M é diferente de $2I$, é impossível diagonalizá-la perfeitamente.

3 A Solução: O Bloco de Jordan e o surgimento do "1"

Para consertar o sistema e garantir que a segunda coluna gere uma equação diferente, alteramos a matriz diagonal colocando um **"1"** acima do segundo autovalor. Esta nova matriz chama-se **Bloco de Jordan (J)**:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{1} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vamos verificar como isso afeta a multiplicação matricial original ($MS = SJ$), assumindo que S é formada pelos vetores colunas v_1 e v_2:

$$M \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Realizando a multiplicação matriz-matriz (coluna por coluna):

- **Coluna 1:** $Mv_1 = 2v_1 + 0v_2 \quad \Rightarrow \quad Mv_1 = 2v_1$

(Esta é a equação clássica do autovetor que já resolvemos!)

- **Coluna 2:** $Mv_2 = \mathbf{1}v_1 + 2v_2$
  (Veja a mágica do "1"! Ele forçou a direção do primeiro vetor a "vazar"para a equação do segundo vetor.)

Reorganizando a equação da Coluna 2, deduzimos a fórmula do **Autovetor Generalizado**:

$$(M - 2I)v_2 = v_1$$

4 Calculando o Autovetor Generalizado

Agora basta aplicar a equação que acabámos de descobrir, usando a nossa matriz M e o vetor $v_1 = (1, 1)^T$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Isso resulta na equação $-x + y = 1$, ou seja, $y = x + 1$. Podemos escolher qualquer valor prático para x. Se $x = 0$, temos $y = 1$. O nosso autovetor generalizado é:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusão do Problema:
Agora temos uma matriz S válida, invertível, e a nossa matriz original M foi decomposta com sucesso na Forma de Jordan ($M = SJS^{-1}$):

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$